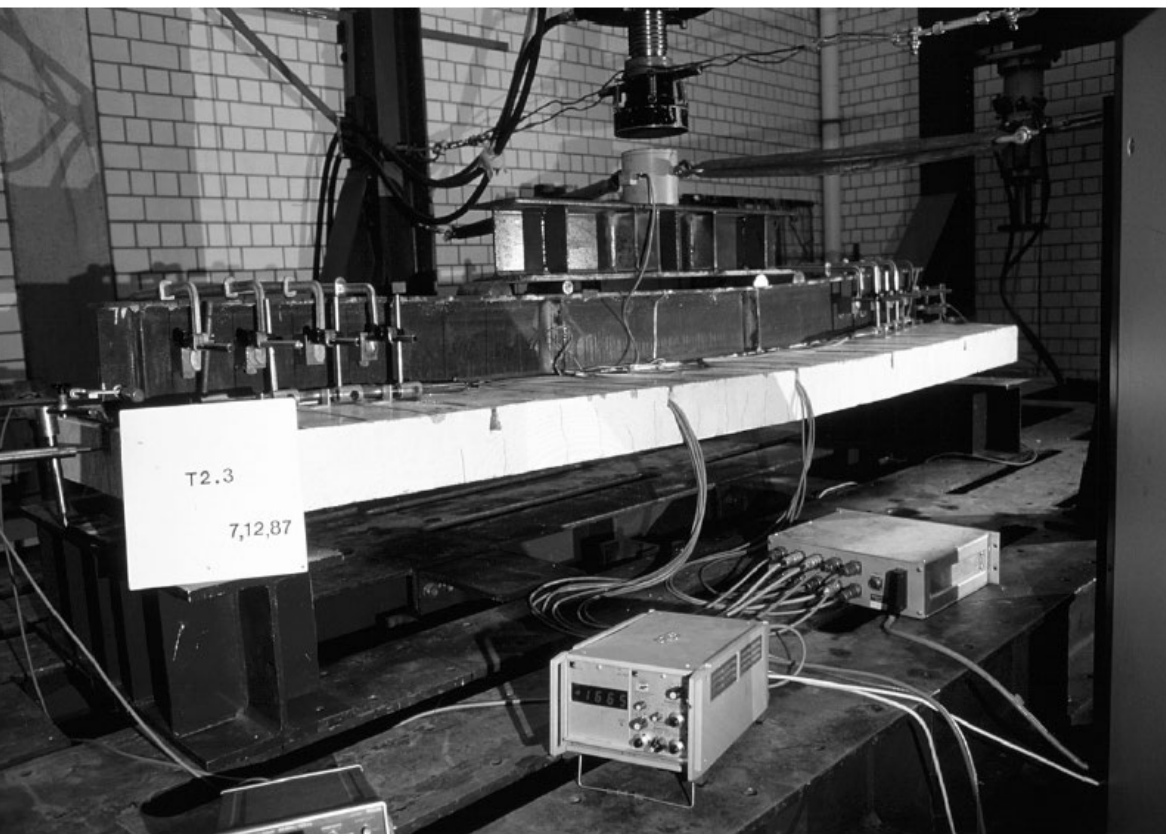


Grundlagen zu Verformungsberechnungen für überwiegend auf Biegung beanspruchte Stahlbetonquerschnitte unter Berücksichtigung des Reißens des Betons

Überblick über Berechnungsverfahren zu Verformungsberechnungen nach DIN 1045-1 und Eurocode 2 Teil 1-1 von Dr.-Ing. Joachim Kretz



Die Verformungen eines Bauteils oder eines Tragwerks dürfen weder die ordnungsgemäße Funktion noch das Erscheinungsbild des Bauteils beeinträchtigen. Um dies sicherzustellen sind Verformungsbeschränkungen einzuhalten. Die hierfür einzuhaltenden Grenzwerte sind wiederum abhängig von den jeweiligen Nutzungs- und Rahmenbedingungen.

Verformungsbeschränkungen können entweder durch eine Begrenzung der Biegeschlankheit oder

durch eine genauere Verformungsberechnung nachgewiesen werden. Da die wahrscheinlich auftretende Verformung (Durchbiegung) von überwiegend auf Biegung beanspruchten Stahlbetonbauteilen von einer Vielzahl streuender Einflussparameter abhängt, kann der tatsächliche Verformungswert nur näherungsweise ermittelt werden. Im Folgenden werden die wesentlichen Berechnungsverfahren zu Verformungsberechnungen kurz erläutert.

1. Begrenzung der Verformungen

Eine Begrenzung der Verformungen ist im Allgemeinen aus folgenden Gründen erforderlich:

- Erhalt der Gebrauchstauglichkeit, d. h. der Funktionalität
- Vermeidung von Schäden in angrenzenden, tragenden oder nichttragenden Bauteilen
- Vermeidung von übermäßigen Schwingungen
- Erhalt eines subjektiv ansprechenden Erscheinungsbildes

1.1 Allgemeines - Empfohlene Verformungsbegrenzungen

Die wahrscheinlich auftretende Durchbiegung von überwiegend auf Biegung beanspruchten Stahlbetonbauteilen ist von vielen Einflussparametern abhängig. Diese Parameter beeinflussen sowohl die anfängliche als auch die zeitliche Entwicklung der Verformung. Streuende Materialeigenschaften (Betonqualität, Elastizitätsmodul und Zugfestigkeit, Stahlsorte sowie die Größe des Betonkriechens und Schwindens) beeinflussen die Durchbiegung ebenso wie die vorhandenen geometrischen Bedingungen (Einspanngrad an den Auflagern, Querschnittsabmessungen, ein- oder zweiachsige Lastabtragung, Lage der Bewehrung, ...) sowie die Belastung und die Umgebungsbedingungen.

Die aufgeführten Parameter sind zum Teil zeitabhängig. Darüber hinaus streuen diese nicht nur von Bauteil zu Bauteil, sondern auch innerhalb eines Bauteils. Deshalb lassen sich die auftretenden Verformungen nicht exakt berechnen, sondern können nur im Rahmen der getroffenen Annahmen näherungsweise ermittelt werden.

Geeignete Grenzwerte für die Durchbiegung sind in der Regel auf die Art des Tragwerks, des Ausbaus, etwaige leichte Trennwände oder Befestigungen sowie auf die Funktion des Tragwerks abzustimmen. In DIN 1045-1 [1] werden für übliche Bauwerke des Hochbaus (Wohnbauten, Bürobauten, öffentliche Bauten und Fabriken) folgende Grenzwerte zulässiger Durchbiegungen angegeben:

- Um die Gebrauchstauglichkeit und das Erscheinungsbild des Bauteils nicht zu beeinträchtigen, sollte der Bauteildurchhang unter der quasi-ständigen Einwirkungskombination auf $l_{eff} / 250$ begrenzt werden.
- Zur Vermeidung von Schäden an angrenzenden Bauteilen, wie z.B. leichten Trennwänden, sollte nach dem Einbau dieser Bauteile die Durchbiegung einschließlich der zeitabhängigen Verformungsanteile als Richtwert auf $l_{eff} / 500$ begrenzt werden.

- Es wird in DIN 1045-1 jedoch auch darauf hingewiesen, dass im Einzelfall evtl. andere Grenzwerte festgelegt werden können oder müssen.

Der Grenzzustand der Verformung darf nachgewiesen werden durch:

- Begrenzung der Biegeschlankheit
- Vergleich einer berechneten Verformung mit einem Grenzwert

1.2 Nachweis der Verformungen ohne direkte Berechnung

DIN 1045-1 ermöglicht den Nachweis der Einhaltung der empfohlenen Grenzwerte der zulässigen Verformung über die Begrenzung der Biegeschlankheit. Für die Einhaltung der Verformungsgrenzen wird bei Deckenplatten des üblichen Hochbaus die Biegeschlankheit auf $l_i / d = 35$ begrenzt.

Stahlbetonbauteile, an die höhere Anforderungen hinsichtlich der Begrenzung der Verformungen gestellt werden, wie z.B. bei rissgefährdeten Trennwänden, müssen Biegeschlankheiten von $l_i / d \leq 150 / l_i \leq 35$ einhalten. Die Ersatzstützweite $l_i = \alpha_i \cdot l_{eff}$ kann dabei für häufig vorkommende Fälle bei biegebeanspruchten Bauteilen mit Hilfe der Tabelle 22 der DIN 1045-1 berechnet werden. Bei zweiachsig gespannten, linienförmig gelagerten Stahlbetonplatten ist die kleinere Ersatzstützweite l_i zu verwenden.

Die angegebenen Biegeschlankheiten stellen lediglich ein Hilfsmittel für die Wahl der Bauteildicke dar. Die Einhaltung der Biege- und Querkrafttragfähigkeit muss unabhängig von der Verformungsabschätzung nachgewiesen werden.

Mit dem o.g. Biegeschlankheitskriterium nach DIN 1045-1 kann die Einhaltung der zulässigen Verformungen von $l_{eff} / 250$ bzw. $l_{eff} / 500$ rechnerisch nicht ohne weiteres nachvollzogen werden. Das Biegeschlankheitskriterium ist für gering belastete und somit gering bewehrte Stahlbetonplatten des üblichen Hochbaus ohne weiteres anwendbar. Bei hochbelasteten und damit hochbewehrten Platten ($\mu > 0,5\%$), bei denen große Bauteilbereiche im gerissenen Zustand II sind, kann die Verformung mit dem normativen Biegeschlankheitskriterium nicht in allen Fällen auf die empfohlenen Werte begrenzt werden. Dies gilt ebenso für Einfeldplatten, bei denen Randeinspannungen durch Wände oder Unterzüge fehlen, sowie für Platten mit unregelmäßiger Geometrie. **Aus diesem Grund sollte bei hohen Anforderungen an die Verformungsbegrenzung in jedem Fall ein rechnerischer Nachweis vorgezogen werden.**

Dass dennoch die über das Biegeschlankheitskriterium festgelegten Stahlbetonbauteile weitestgehend schadensfrei sind, dürfte ursächlich durch nicht berücksichtigte Einflussfaktoren wie Überfestigkeiten des Materials, unberücksichtigten Randeinspannungen oder in der zweiachsigen Lastabtragung begründet sein. Die empfohlenen Verformungsgrenzwerte sollten deshalb nur als grobe Richtwerte für Standardfälle angesehen werden.

2. Rechnerische Ermittlung der Verformungen

Genauere Verformungsnachweise sind für Bauteile erforderlich, die außerhalb der angegebenen Grenzen liegen oder, wenn andere Durchbiegungsgrenzen als die den vereinfachten Verfahren zugrunde liegenden, erforderlich sind.

2.1 Allgemeines

Die maßgebenden Betoneigenschaften zur Berechnung der Verformung sind:

- Zugfestigkeit
- Elastizitätsmodul
- Rissbildung

Zusätzlich zu diesen o. g. streuenden Größen können die folgenden Einflussgrößen für die Verformungsberechnung von Bedeutung sein:

- Mitwirken des Betons zwischen den Rissen (Tension Stiffening)
- Auswirkungen von Kriechen und Schwinden
- Einfluss von Zwangsbeanspruchung wie Temperatur
- Rissbildung infolge vorheriger Belastung
- Belastungsart: statisch oder dynamisch
- Schubverformungen, ...

Es ist zu beachten, dass das Superpositionsgesetz für Verformungsberechnungen ungültig ist, wenn unter den jeweiligen Beanspruchungen Risse zu erwarten sind.

Das Berechnungsverfahren muss das Verhalten des Tragwerks unter den maßgebenden Einwirkungen und der streuenden Einflussgrößen wirklichkeitsnah mit einer Genauigkeit beschreiben, die auf den Zweck des Nachweises abgestimmt ist.

Aus diesem Grund werden nachfolgend die Grundlagen zu zwei Verfahren unterschiedlicher Komplexität vorgestellt.

Iterative nichtlineare Berechnungen:

Die Verformungsberechnung komplexer Stahlbetontragwerke unter Berücksichtigung der Rissbildung und anderer nichtlinearer Effekte erfolgt im Allgemeinen durch ein iteratives Vorgehen.

Das verwendete FE-Programm muss dabei über Materialmodelle verfügen, um die wesentlichen Effekte wie z.B. die Rissbildung des Betons bei Überschreiten der Zugfestigkeit und die verbundbedingte Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen (Tension Stiffening) zu erfassen. Auch die Langzeiteffekte infolge von Kriechen und Schwinden des Betons müssen in diskreten Zeitschritten erfasst werden.

Numerische Berechnung der Verformung mit praxisgerechten Vereinfachungen:

Eine Möglichkeit der Berechnung der zu erwartenden Verformung wird im Eurocode 2 Teil 1-1 ([2],[3]) angegeben. Dieses Verfahren beruht auf der Interpolation der Krümmung in maßgebenden Querschnitten und der anschließenden Berechnung der Verformung durch eine abschnittsweise Integration über die Bauteillänge. Auch bei diesem Verfahren kann sowohl die Rissbildung als auch die Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen berücksichtigt werden.

2.2 Tragverhalten von Stahlbetonbauteilen

In Bild 1 ist prinzipiell eine typische Last-Verformungskurve eines Stahlbetonbauteils unter Gleichstreckenbelastung abgebildet. Diese Last-Verformungskurve ist charakterisiert durch einen linear-elastischen Anfangsbereich mit ungerissenem Beton, den Beginn der Rissbildung mit deutlichem Verformungszuwachs, das Fortschreiten der Risse im Bauteil und schließlich die Bildung von Fließgelenken bei Annäherung an die Traglast.

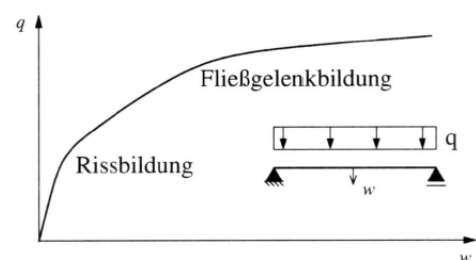


Bild 1. Last-Verformungskurve eines Stahlbetonbauteils nach [4]

In vielen Fällen des üblichen Hochbaus liegen die Lasten im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit in der Nähe oder geringfügig über der Risslast. Deshalb wirken sich die Zugfestigkeit und das Verhalten beim Übergang vom ungerissenen in den gerissenen Zustand stark auf die Verformungen aus.

Durch das Kriechen des Betons unter Langzeitbelastung nehmen die Verformungen zu. Da die Zugfestigkeit unter Langzeitlast nur bei etwa 70%

der Kurzzeitzugfestigkeit liegt, kann es auch unter konstanter Langzeitbelastung zu einem Fortschreiten der Rissbildung kommen.

Da biegebeanspruchte Bauteile üblicherweise unsymmetrisch bewehrt sind, führt das Schwinden, d. h. die Längenänderung infolge Austrocknung, zu einer Verkrümmung des Querschnitts und damit auch zu einer zusätzlichen Verformung. Außerdem entstehen bei einer Behinderung der Schwindverkürzungen Normalkräfte, die die Risschnittgrößen herabsetzen.

2.3 Numerische Berechnung der Verformung unter Berücksichtigung des Mitwirkens des Betons zwischen den Rissen

Die wirklichkeitsnahe Erfassung des Steifigkeitsverhaltens im ungerissenen Zustand, im Zustand der Erstrissbildung und im Bereich des abgeschlossenen Rissbildes ist zur Beschreibung des komplexen Trag- und Verformungsverhaltens bei nichtlinearen Berechnungen von Stahlbetonbauteilen von entscheidender Bedeutung.

2.3.1 Allgemeines

Damit eine realitätsnahe Systemberechnung durchgeführt werden kann, ist in den Verformungsberechnungen die Mitwirkung des Betons auf Zug zu berücksichtigen.

Durch die geringe Zugtragfähigkeit des Betons und der daraus resultierenden Rissbildung bei Überschreiten der Zugfestigkeit kommt es zu einem Aufreißen des Betonquerschnitts. Im Riss werden die Kräfte vom Bewehrungsstahl allein übernommen, zwischen den Rissen werden aber Kräfte vom Bewehrungsstahl durch Verbund auf den umgebenden Beton übertragen. Dieses Mitwirken des Betons auf Zug zwischen den Rissen (Tension Stiffening) kann in nichtlinearen Berechnungsverfahren auf zwei verschiedene Arten berücksichtigt werden. Entweder kann für die Steifigkeitserhöhung eine modifizierte σ - ϵ -Kurve im Zugbereich des Betons definiert werden oder sie kann durch eine modifizierte σ - ϵ -Kurve des Bewehrungsstahls erfasst werden. Beide Möglichkeiten werden nachfolgend kurz vorgestellt.

2.3.2 Tension Stiffening Effekt bei Stahlbeton

2.3.2.1 Spannungs-Dehnungs-Kurve des Betons im Zugbereich mit Tension Stiffening

Die Arbeitslinie des Betons auf Zug ist gekennzeichnet durch ein lineares Anwachsen der Betonzugspannungen bis zum Erreichen der Betonzugfestigkeit. Nach dem Überschreiten der Zugfestigkeit f_{ctm} läßt sich die σ - ϵ -Kurve durch einen abfallenden Ast beschreiben, dessen Länge

auf die zur Zugfestigkeit gehörende Dehnung ϵ_{ct} bezogen ist. Die Faktoren α werden nach [5] mit 8 bis 10 angegeben.

$$\epsilon_{ctu} = \alpha \cdot \epsilon_{ct}$$

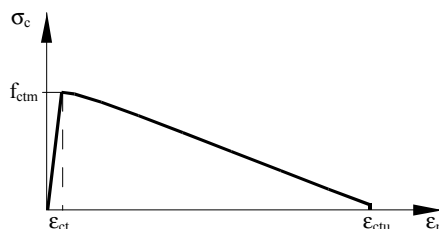


Bild 2. Zugbereich des Betongesetzes zur Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen

Der Verlauf des abfallenden Astes in der in Bild 3 beschriebenen σ - ϵ -Kurve zeigt nach Schwennicke [6] eine Abhängigkeit vom Bewehrungsgrad. Bei einem kleinen Bewehrungsgrad μ verläuft der abfallende Ast nahezu linear oder schwach parabelförmig, während er bei einem hohen Bewehrungsgrad zunächst stark abfällt (auf etwa den halben Wert der Betonzugfestigkeit) und dann sehr flach verläuft, so dass nur noch eine schwache Mitwirkung des Betons auf Zug vorhanden ist.

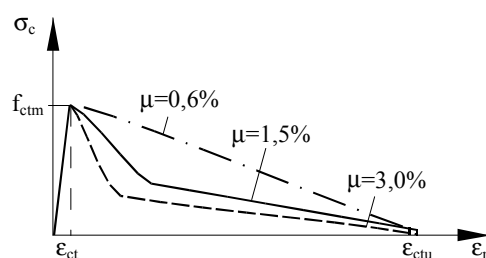


Bild 3. Einfluss des Bewehrungsgrades auf die Spannungs-Dehnungsbeziehung und die Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen nach [6]

Der Verlauf der σ - ϵ -Kurve des Betons im Druck- und Zugbereich lässt sich damit nach Bild 4 beschreiben.

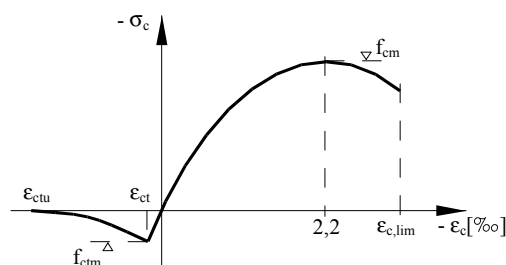


Bild 4. Spannungs-Dehnungsbeziehung des Betons im Druck- und Zugbereich unter Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen

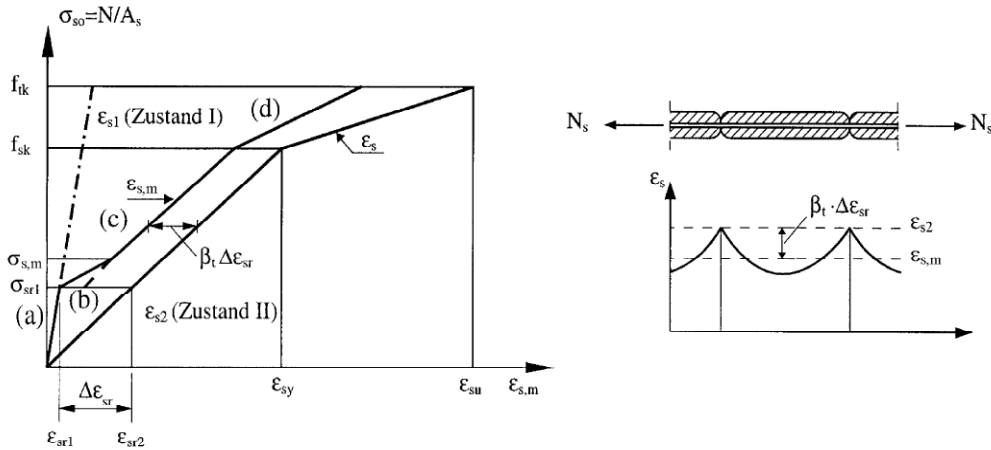


Bild 5. Spannungs-Dehnungsbeziehung für den eingebetteten Bewehrungsstahl nach [7]

2.3.2.2 Spannungs-Dehnungs-Kurve des Bewehrungsstahls im Zugbereich mit Tension Stiffening

In der Literatur (z.B. [7]) wird die Rissbildung im Beton unter Zugbeanspruchung und das Mitwirken des Betons zwischen den Rissen ausführlich beschrieben. Im Rahmen dieses Artikels werden deshalb nur die wesentlichen Vorgänge dargestellt.

Das gesamte Spannungs-Dehnungsverhalten eines in Beton eingebetteten Bewehrungsstahls ist im CEB-FIP Model Code 1990 [7] angegeben (Bild 5). Mit diesen Beziehungen lassen sich die Verformungen und die Steifigkeiten eines Stahlbeton-Zuggliedes unter statischer Belastung sehr wirklichkeitsnah abschätzen.

Vom Beanspruchungsbeginn bis zum Fließen der Bewehrung werden folgende Phasen der Rissbildung unterschieden:

- (a) der ungerissene Zustand I
- (b) die Erstrissbildung bis zum abgeschlossenen Rissbild
- (c) das stabile Risswachstum (sukzessive Risteilung)
- (d) Fließen und Nachfließverhalten (mit Verfestigung).

Um den Einfluss der Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen besser erkennen zu können, enthält Bild 5 die Spannungs-Dehnungslinie des Bewehrungsstahls im reinen Zustand II.

Die modifizierte Spannungs-Dehnungslinie des Betonstahls unter Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen ist für die einzelnen Bereiche wie folgt definiert:

a) ungerissener Querschnitt

$$0 < \sigma_s \leq \sigma_{sr1} \quad \text{bzw.} \quad 0 < N_s \leq N_{s,cr}$$

$$\epsilon_{s,m} = \epsilon_{s1}$$

b) Zustand der Erstrissbildung

$$\epsilon_{s,m} = \epsilon_{s2} - \frac{\beta_t (\sigma_s - \sigma_{sr1}) + (\sigma_{sm} - \sigma_s)}{\sigma_{sm} - \sigma_{sr1}} \underbrace{(\epsilon_{sr2} - \epsilon_{sr1})}_{\Delta \epsilon_{sr}}$$

In dieser Phase findet ein Dehnungssprung der Größe $\Delta \epsilon_{sr}$ statt.

c) Stabiles Risswachstum (sukzessive Risteilung)

$$\sigma_{sm} < \sigma_s \leq f_{sk} \quad \text{bzw.} \quad N_{s,m} \leq N_{s,y}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{sm} &= \epsilon_{s2} - \beta_t (\epsilon_{sr2} - \epsilon_{sr1}) \\ &= \epsilon_{s2} - \beta_t \cdot \Delta \epsilon_{sr} \end{aligned}$$

d) Fließen und Nachfließverhalten

$$f_{sk} < \sigma_s \leq f_{tk}$$

$$\epsilon_{s,m} = \epsilon_{sy} - \beta_t \frac{(\epsilon_{sr2} - \epsilon_{sr1})}{\Delta \epsilon_{sr}} + \delta \left(1 - \frac{\sigma_{sr1}}{f_{sk}} \right) (\epsilon_{s2} - \epsilon_{sy})$$

Dabei ist:

- ϵ_{s1} die Betonstahldehnung im ungerissenen Zustand
- ϵ_{s2} die Betonstahldehnung im gerissenen Zustand ohne Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen
- ϵ_{sy} die Betonstahldehnung an der Fließspannung f_{sk}
- ϵ_{sr1} die Betonstahldehnung im ungerissenen Zustand infolge der Risschnittgröße $N_{s,cr}$ die mit dem Mittelwert der Betonzugfestigkeit f_{ctm} zu bestimmen ist
- ϵ_{sr2} die Betonstahldehnung des gerissenen Querschnittes (reiner Zustand II) unter der Risschnittgröße
- $\epsilon_{s,m}$ mittlere Betonstahldehnung
- σ_{sr2} die Betonstahlspannung im Riss

- σ_{sr1} die Betonstahlspannung vor dem ersten Riss, eine Funktion der Betonzugfestigkeit und des Bewehrungsgrades
- σ_{sm} die Betonstahlspannung bei abgeschlossener Rissbildung; wenn keine genaueren Angaben vorliegen, darf mit $\sigma_{sm} = 1.3 \sigma_{sr1}$ gerechnet werden
- $N_{s,cr}$ die Normalkraft bei Erstrissbildung ($N_{s,cr} = \sigma_{sr1} \cdot A_s$)
- $N_{s,m}$ die Normalkraft bei abgeschlossener Erstrissbildung, für die der Wert $N_{s,m} = 1.3 N_{s,cr}$ angesetzt werden darf
- β_t ein Beiwert, der für Betonrippenstahl für Kurzzeitbelastung (reiner Zug) mit 0.4 angesetzt werden darf
- β_t ein Beiwert, der für Betonrippenstahl für Dauerlast oder wiederholter Belastung (reiner Zug) mit 0.25 angesetzt werden darf
- f_{sk} der charakteristische Wert der Streckgrenze
- δ ein Beiwert zur Berücksichtigung des Verhältnisses f_{tk}/f_{sk} und der Fließspannung $f_{sk'}$ der für duktilen Bewehrungsstahl und $f_{sk} = 500 \text{ MPa}$ mit 0.8 angenommen werden darf

Wesentliche Einflußgrößen für das Mitwirken des Betons zwischen den Rissen sind die Betonfestigkeit f_{ct} , die Verbundgüte und der Bewehrungsgrad μ . Die Mitwirkung des Betons steigt, wenn der Bewehrungsgrad abnimmt (vergl. hierzu auch Bild 3). Bild 6 verdeutlicht dies sehr eindrucksvoll.

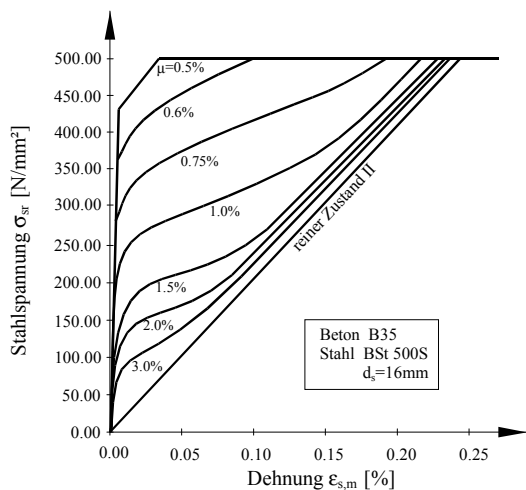


Bild 6. Mittlere Dehnungs-Spannungsbeziehungen im elastischen Stahldehnungsbereich nach [8]

2.3.3 Tension Stiffening Effekt bei Verbundquerschnitten – Riss- und Krümmungsverhalten von Verbundquerschnitten im negativen Momentenbereich

Nicht nur in reinen Stahlbetonquerschnitten spielt die Zugversteifung durch das Mitwirken des Betons zwischen den Rissen auf das Steifigkeits- und das Verformungsverhalten eine wesentliche Rolle.

Die Effekte treten in gleicher Weise auch in Stahlbetonplatten von Verbundträgern auf.

In Bild 7 sind für einen Verbundquerschnitt unter negativer Momentenbeanspruchung (statisch) die Zusammenhänge zwischen Biegemoment M bzw. Gurtnormalkraft N_s und der Krümmung κ dargestellt [9]. Bis zum Erreichen der Betonzugfestigkeit in der Randfaser des Betongurtes unter dem Rissmoment M_r besteht ein linearer, der Elastizitätstheorie gehorchender Zusammenhang. Sobald das Rissmoment M_r erreicht ist, bilden sich unter der Rissnormalkraft N_{sr} zunächst einige Risse mit relativ großen Rissabständen. Die Rissbildung verursacht eine Abnahme der Steifigkeit des Betongurtes und eine entsprechende Zunahme der mittleren Dehnung $\epsilon_{s,m}$. Der sich einstellende Gleichgewichtszustand ist durch ein größeres Biegemoment M_a im Stahlträger und entsprechend kleinere Normalkräfte N_s und N_a gekennzeichnet.

Erst wenn das Biegemoment so weit gesteigert wird, dass im Stahlbetongurt wiederum die Rissnormalkraft N_{sr} erreicht wird, können weitere Risse entstehen. Der erneute Abfall der Gurtnormalkraft bzw. die Zunahme der Krümmung bei weiterer Rissbildung ist dann weniger stark ausgeprägt. Der Bereich, in dem die Gurtnormalkraft nicht über das Niveau N_{sr} hinaus anwächst, wird als Bereich der Erstrissbildung bezeichnet.

Die Rissbildung bewirkt, dass in der unmittelbaren Umgebung des Risses eine Umlagerung der Kräfte vom Beton auf den Bewehrungsstahl stattfindet. Die daraus resultierenden Schubbeanspruchungen zwischen dem Beton und dem Bewehrungsstahl (Verbundspannungen) führen zu Relativverschiebungen zwischen diesen Verbundpartnern und damit zur Öffnung des Risses.

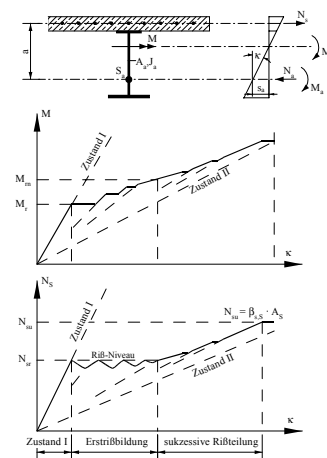


Bild 7. Momenten-Krümmungs- und Normalkraft-Krümmungsbeziehungen bei Rissbildung im gezogenen Betongurt

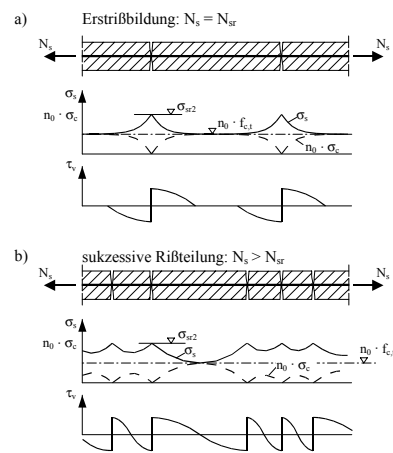


Bild 8. Beanspruchungen im Betongurt bei Erstrissbildung und bei sukzessiver Rissbildung nach [9]

Der Verlauf der Spannung σ_c im Beton und σ_s im Bewehrungsstahl im Bereich der Erstrissbildung wird durch Bild 8 charakterisiert. Zwischen den einzelnen, weit auseinanderliegenden Rissen befinden sich noch Bereiche, in denen keine Relativverschiebungen zwischen Beton und Bewehrungsstahl auftreten. Wächst in diesen Bereichen die Betonspannung durch Momentensteigerung bis auf den Wert der Betonzugfestigkeit an, kommt es dort zu weiteren Rissbildungen.

Im Bereich der Erstrissbildung ist die obere Grenze der Beanspruchung des Gurtes durch die Rissnormalkraft N_{sr} gegeben. Infolge der noch großen Rissabstände werden die Relativverschiebungen an einzelnen Rissen nicht durch benachbarte Risse beeinflusst. Die Risse öffnen sich in diesem Beanspruchungsbereich maximal bis auf den Wert bei Entstehen des ersten Risses.

Wird die Momentenbeanspruchung weiter bis auf den Wert M_{su} gesteigert, stellt sich im Gurt ein Rissabstand ein, bei dem über die gesamte Länge zwischen Bewehrungsstahl und Beton Relativverschiebungen auftreten. Unter der Gurtkraft $N_s = N_{sr}$ ist die Betonspannung σ_c zwischen den Rissen stets kleiner als die Betonzugfestigkeit. Der Zustand wird als abgeschlossene Erstrissbildung bezeichnet.

Ein Anwachsen der Gurtnormalkraft N_s über das Niveau N_{sr} hinaus wird bei einer weiteren Steigerung der Biegebeanspruchung erreicht; dabei wachsen die Rissbreiten an. Zwischen den Rissen können noch weiterhin Kräfte in den Beton eingeleitet werden, da die Verbundwirkung zwischen der Bewehrung und dem Beton noch nicht erschöpft ist. Diese Steigerung bewirkt wieder ein Erreichen der Betonzugfestigkeit und weitere sukzessive Rissbildungen.

Bei statischer Belastung führt das Mitwirken des Betons zwischen den Rissen – in Abhängigkeit des Bewehrungsgrades - auch bei höheren Beanspruchungen zu einer deutlichen Vergrößerung der Steifigkeit des Betongurtes und damit auch zur Gesamtsteifigkeit des Verbundquerschnitts.

2.4 Numerische Berechnung der Verformungen mit praxisgerechten Vereinfachungen

Ein für die Ingenieurbau Praxis geeignetes Berechnungsverfahren zur Ermittlung der Bauteilverformungen von überwiegend auf Biegung beanspruchten Stahlbetonbauteilen unter Berücksichtigung der Rissbildung und des zeitabhängigen Materialverhaltens des Betons (Kriechen und Schwinden) ist im Anhang 4 des Eurocode 2, Teil 1-1 [2] und in Kapitel 7 des kommenden Eurocodes 2, Teil 1-1 [3] beschrieben.

Dieses Verfahren beruht auf der Interpolation der Verkrümmung in maßgebenden Querschnitten und anschließender Berechnung der Verformung durch eine abschnittsweise Integration über die Systemabmessungen.

Nach der Elastizitätstheorie besteht zwischen Verkrümmung und Moment die Beziehung:

$$\kappa(x) = \frac{M(x)}{E \cdot I(x)}$$

Die Krümmung κ wird entscheidend durch die Biegesteifigkeit $E \cdot I(x)$ beeinflusst. Treten im Bauteil Risse auf, verringert sich die Steifigkeit. Dies führt zu einer Vergrößerung der Krümmung und damit zu einer Vergrößerung der Verformung.

Eine realitätsnahe Berechnung von Verformungen ist daher nur unter Berücksichtigung der Rissbildung möglich. Für eine Einfeldplatte unter Gleichlast ist in Bild 9 beispielhaft die Verteilung der Biegesteifigkeit unter Berücksichtigung der Rissbildung schematisch dargestellt.

Die Krümmung an der Stelle (x) ermittelt sich aus der kleinen Winkeländerung und der Dehnungsverteilung zu:

$$\kappa(x) = \frac{1}{r}(x) = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d^2w(x)}{dx^2}$$

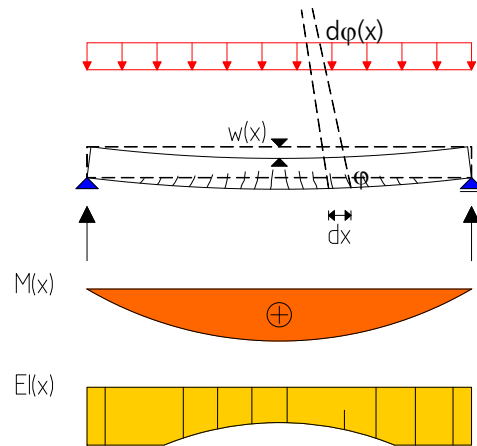


Bild 9. Verteilung der Biegesteifigkeit unter Berücksichtigung der Rissbildung

Das numerische Verfahren ermöglicht die Berücksichtigung der Rissbildung, die Berücksichtigung der Mitwirkung (vereinfacht) des Betons auf Zug zwischen den Rissen sowie die Berücksichtigung des Kriechens und Schwindens des Betons.

Die Umlagerungen innerhalb des Querschnitts sowie bei statisch unbestimmten Systemen auch die Umlagerungen der Schnittgrößen und damit auch die Verformungen werden im Verfahren durch den Ansatz effektiver Biegesteifigkeiten berücksichtigt.

Die effektive Biegesteifigkeit unter Berücksichtigung der zeit- und lastabhängigen Kriecheinflüsse für den untersuchten Zeitraum t wird mit dem effektiven Elastizitätsmodul des Betons $E_{c,eff}(t)$ ermittelt. Der effektive E-Modul ergibt sich zu:

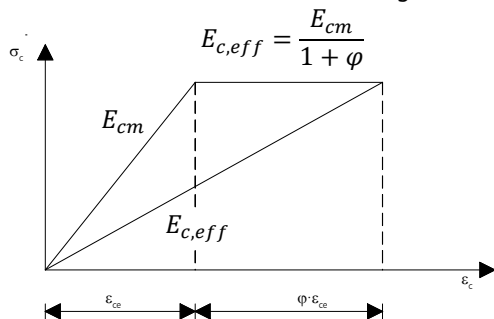


Bild 10. Definition des effektiven E-Moduls unter Berücksichtigung des Kriechens

Die Berechnung der effektiven Biegesteifigkeit kann getrennt für Zustand I und Zustand II unter Ansatz des Kriechbeiwertes nach DIN 1045-1 erfolgen.

Das Schwinden des Betons verursacht eine zusätzliche Krümmung κ_{cs} und damit einen zusätzlichen Verformungsanteil (bei unsym. Bewehrungsanordnung). Die zusätzliche Krümmung infolge Schwindens des Betons wird ermittelt zu:

$$\kappa_{cs} = \epsilon_{cs} \cdot \alpha_e \cdot S / I$$

mit

ϵ_{cs} Schwinddehnung

$$\alpha_e = E_s / E_{c,eff}$$

S Flächenmoment 1. Grades der Bewehrung, bezogen auf die Schwerachse des Querschnitts (statisches Moment)

I Flächenmoment 2. Grades des Querschnitts (Trägheitsmoment)

Für eine betrachtete Einwirkungskombination (quasi-ständige EWK) wird in einigen Bauteilabschnitten die Zugfestigkeit des Betons überschritten sein und der Beton aufreißen, also in den Zustand II übergehen. Andere Teilbereiche reißen aufgrund der geringeren Beanspruchung nicht auf und verbleiben im Zustand I. Innerhalb des Systems bilden sich somit gerissene und ungerissene Teilbereiche (siehe Bild 11).

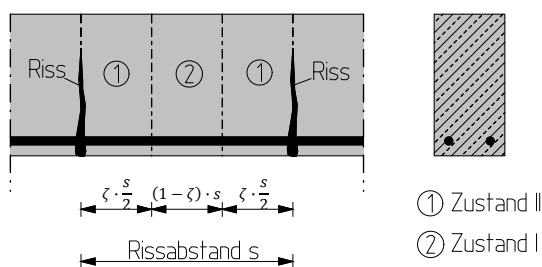


Bild 11. Berechnungsmodell für die Überlagerung der Zustände I und II

Die Biegesteifigkeit $E \cdot I_{II} = M / \kappa_{II}$ ist nur direkt im Riss zutreffend. Für eine wirklichkeitsnahe Verformungsberechnung ist das **mittlere Tragverhalten unter Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen** zu berücksichtigen. Es muss mit einer mittleren Biegesteifigkeit gerechnet werden. Dies erfolgt nach den Berechnungsgrundlagen des EC 2 über nachfolgenden Ansatz:

$$\kappa = \zeta \cdot \kappa_{II} + (1 - \zeta) \cdot \kappa_I$$

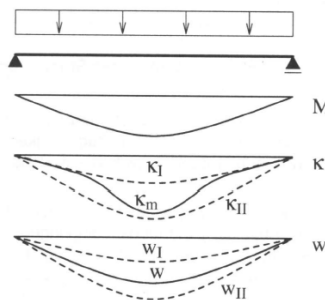


Bild 12. Biegemoment, Krümmung und Verformung eines Stahlbetonbauteils

In dieser Bestimmungsgleichung sind die Krümmungsanteile im Zustand I und Zustand II durch die Beiwerte κ_I und κ_{II} beschrieben. Das gewichtete Mittel der Verformung ergibt sich über den Verteilungsbeiwert ξ zu:

$$\zeta = 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2$$

Hierin sind:

- β_1 Verbundbeiwert der Bewehrung
- $\beta_1 = 1,0$ für Rippenstahl
- $\beta_1 = 0,5$ für glatten Betonstahl
- β_2 Beiwert zur Berücksichtigung der Belastungsdauer oder wiederholter Belastung
- $\beta_2 = 1,0$ für eine einzelne kurzzeitige Belastung
- $\beta_2 = 0,5$ für Dauerbelastung oder zahlreiche Lastwechsel
- σ_s Spannung in der Zugbewehrung bei gerissenem Querschnitt
- σ_{sr} Spannung in der Zugbewehrung bei gerissenem Querschnitt unter der Erstrissbildung

Für ungerissene Querschnitte gilt $\xi = 0$. Bauteile, die an beliebiger Stelle nicht über die mittlere Betonzugfestigkeit f_{ctm} beansprucht werden, dürfen als ungerissen behandelt werden.

Unter Ansatz des **Verteilungsbeiwerts** ξ stellt sich näherungsweise eine ähnliche Momenten-Krümmungslinie ein, wie sie über ein allgemeines iterativ nichtlineares Rechenverfahren auf der Grundlage von wirklichkeitsnahen Materialgesetzen ermittelt wird (vergleiche Bild 5 und 7).

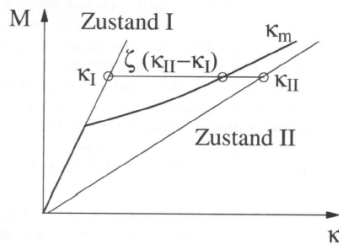


Bild 13. Interpolation der mittleren Krümmung

3. Zusammenfassung

Die Verformungen eines Bauteils oder eines Tragwerks müssen zur Sicherstellung der Gebrauchstauglichkeit begrenzt werden. Die wahrscheinlich auftretende Durchbiegung von überwiegend auf Biegung beanspruchten Stahlbetonbauteilen hängt von einer Vielzahl verschiedener streuender Einflussparameter ab. Die mit den numerischen Berechnungsverfahren zu ermittelnden Verformungswerte können wegen der streuenden Einflussgrößen nur Abschätzungen des tatsächlichen Trag- und Verformungsverhaltens sein. Je wirklichkeitsnäher die einzelnen Einflussparameter erfasst werden, um so realistischer sind die zu erzielenden Verformungs- und Steifigkeitswerte. Voraussetzung für eine nichtlineare Berechnung ist nicht nur die Kenntnis der Baustoffkennwerte und der Querschnittsabmessungen, sondern auch die der Bewehrung nach genauer Lage und Größe.

Dr.-Ing. Joachim Kretz
mb AEC Software GmbH
mb-news@mbaec.de

4. Literatur

- [1] DIN 1045-1: Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton – Teil 1: Bemessung und Konstruktion. Ausgabe August 2008
- [2] DIN ENV 1992-1-1: Eurocode 2: Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken – Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau; Deutsche Fassung ENV 1992-1-1:1992
- [3] DIN EN 1992-1-1: Eurocode 2: Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken – Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau; Deutsche Fassung EN 1992-1-1:2004
- [4] Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb): Heft 525. Erläuterungen zur DIN 1045-1, Ausgabe 2003
- [5] Gilbert, R. J.; Warner, R.: Tension Stiffening in Reinforced Concret Slabs. Journal of Structural Division, Proceedings of the ASCE, Vol. 104, 1978.
- [6] Schwennicke, A.: Zur Berechnung von Stahlbetonbalken und -scheiben im gerissenen Zustand unter Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen. Dissertation, TU Berlin 1983.
- [7] CEB-FIP Model Code 1990. Comité Euro-International du Beton, Lausanne, 1993.
- [8] Bode, H.: Euro-Verbundbau. Konstruktion und Berechnung. 2. Auflage, Werner Verlag, 1998.
- [9] Hanswille, G.: Zur Rissbreitenbeschränkung bei Verbundträgern. Tech.-Wiss. Mitteilung, 86-1, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum, 1986.

Thema

Die Begrenzung der Verformungen im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit stellt eine wesentliche Forderung für die Wahl der Bauteilabmessungen – vor allem für Platten des üblichen Hochbaus – dar. Die tatsächlich sich einstellende Verformung wird von verschiedenen Einflüssen, u.a. dem Kriechen und Schwinden des Betons und der Rissbildung im Beton, beeinflusst. Eine realistische Verformungsabschätzung ist deshalb nur unter Berücksichtigung des Reißens des Betons (Zustand II) möglich.

Das MicroFe-Modul M346 ermöglicht die Nachweisführung der Verformung sowohl im Zustand I (ungerissener Beton) unter Berücksichtigung des Kriechens und Schwindens als auch im Zustand II (mit Rissbildung im Beton) für Platten mit Unterzügen.

Beispiel

Für folgendes System soll der Verformungsnachweis geführt werden:

Zwei Plattenbereiche PL-1 und PL-2:

- jeweils 6 m x 12 m
- Dicke $d = 0.20$ m
- C 25/30, mit Berücksichtigung der Mindestbewehrung
- gelagert auf vier Unterzügen und Linienlagern

Belastung:


- Eigengewicht
- Nutzlast $q_k = 2.70$ kN/m² in Lastfelder aufgeteilt

Eingabe

Wenn das System soweit eingegeben ist, sind vor Durchführung des Verformungsnachweises noch weitere Eingaben zu tätigen.

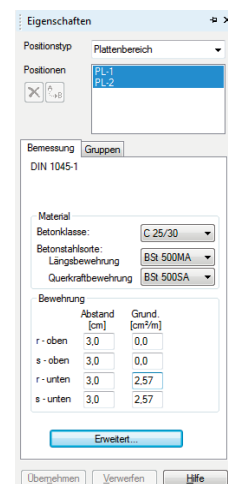
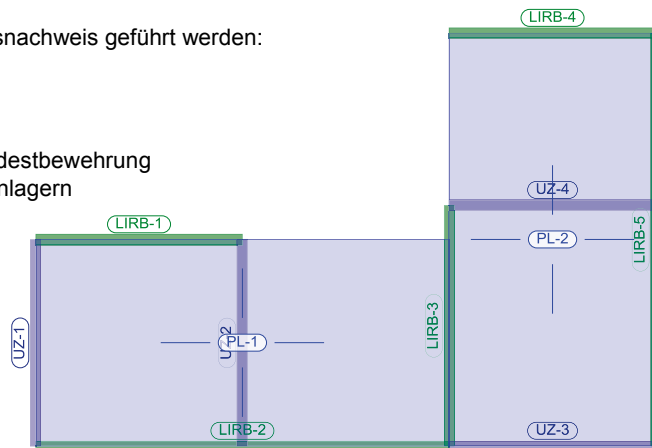
Bewehrung

Die Verformungsberechnung unter Berücksichtigung der Querschnittssteifigkeit im gerissenen Zustand setzt immer die Kenntnis der Bewehrung voraus. In MicroFe wird grundsätzlich die gesamte Bewehrung, welche die Biegebemessung der Plattenbereiche und der Unterzüge liefert, für die Verformungsberechnung angesetzt. Hierzu wird vor der Verformungsberechnung immer eine Bemessung der Platten und Unterzüge durchgeführt, falls diese nicht mehr aktuell ist.

Die **Gesamtbewehrung** der Biegebemessung setzt sich aus der **vorhandenen Bewehrung** und der **erforderlichen (Differenz-)Bewehrung**, welche ggf. zusätzlich zur vorhandenen Bewehrung zur Erfüllung aller Nachweise notwendig wird, zusammen. Als **vorhandene Bewehrung** bezeichnen wir die **Grundbewehrung** der Platten und Unterzüge und die **Zulagebewehrung**. Während die Grundbewehrung, welche in den Bemessungseigenschaften eines Plattenbereichs einzugeben ist, über den gesamten Plattenbereich konstant ist, kann mit dem Positionstyp „Zulagebewehrung“  für einen beliebigen, plattenbereichsübergreifenden Bereich die zusätzliche Bewehrung definiert werden. Für Unterzüge können in den Positionseigenschaften auf der Registerkarte „Grundbewehrung“ beliebige Lagen mit beliebiger Staffelung definiert werden.

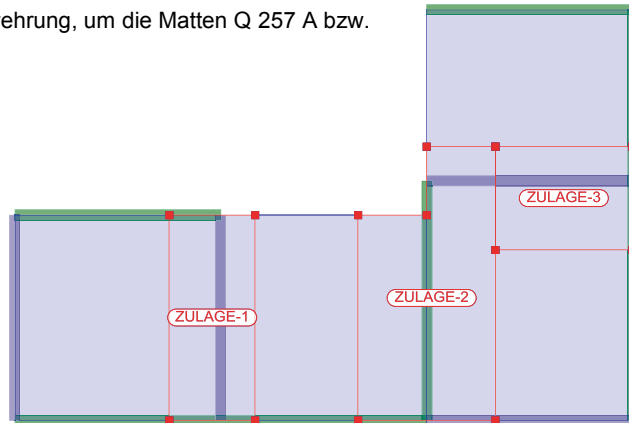
Grundsätzlich kann die Verformungsberechnung auch ohne definierte Grund- und Zulagebewehrung durchgeführt werden. Jedoch kann die Steifigkeit realistischer erfasst werden, wenn die später tatsächlich verbaute Bewehrung weitestgehend als vorhandene Bewehrung in MicroFe vorgegeben wird.

In unserem Beispiel ordnen wir zur Abdeckung der Mindestbewehrung in beiden Plattenbereichen als untere Grundbewehrung eine Betonstahlmatte Q 257 A an.

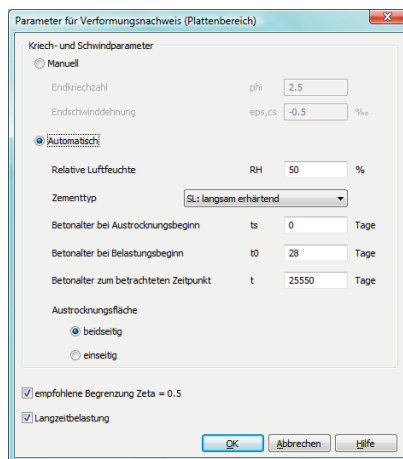


Zudem setzen wir drei Positionen Zulagebewehrung, um die Matten Q 257 A bzw. R 257 A in der oberen Lage abzubilden:
 ZULAGE-1: $asr=2.57 \text{ cm}^2/\text{m}$
 ZULAGE-2: $asr=ass=2.57 \text{ cm}^2/\text{m}$
 ZULAGE-3: $ass=2.57 \text{ cm}^2/\text{m}$

Auf die Definition von Grundbewehrung für die Unterzüge wird in diesem Beispiel verzichtet.



Nachweisparameter



Für jeden Plattenbereich und für jeden Unterzug können separat die Parameter für den Verformungsnachweis definiert werden.

Der nebenstehende Dialog ist in den Positionseigenschaften im erweiterten Bemessungsdialog der jeweiligen Position aufrufbar.

Hier sind die Kriech- und Schwindparameter direkt manuell einzugeben oder sie werden automatisch gemäß DIN 1045-1, 9.1.4 bzw. DAfStb-Heft 525 ermittelt.

Außerdem können noch Einstellungen zum Verteilungsbeiwert ζ und zur Belastungsdauer vorgenommen werden.

Nachweisbereiche

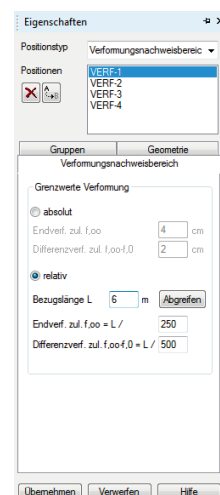
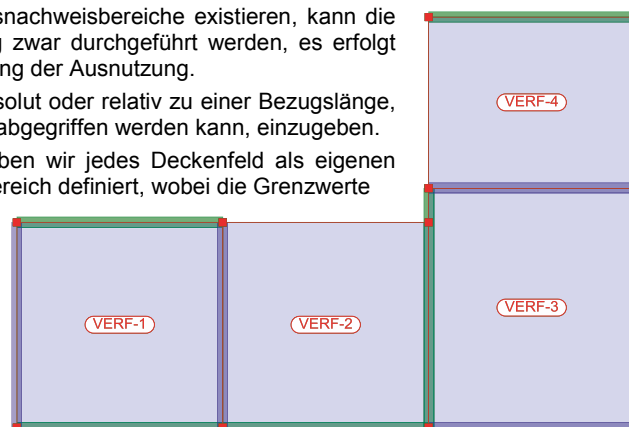
Mit dem Positionstyp „Verformungsnachweisbereich“ definieren Sie Bereiche, in denen der Verformungsnachweis zu führen ist. Durch Vorgabe von zulässigen Verformungsgrenzwerten für den jeweiligen Bereich kann der **Ausnutzungsgrad** der zulässigen Verformung ermittelt werden.

Falls keine Verformungsnachweisbereiche existieren, kann die Verformungsberechnung zwar durchgeführt werden, es erfolgt dann aber keine Ermittlung der Ausnutzung.

Die Grenzwerte sind absolut oder relativ zu einer Bezugsgröße, welche direkt im Modell abgegriffen werden kann, einzugeben.

In unserem Beispiel haben wir jedes Deckenfeld als eigenen Verformungsnachweisbereich definiert, wobei die Grenzwerte alle relativ auf die Spannweite des jeweiligen Feldes bezogen wurden:

- VERF-1 bis VERF-3: Bezugsgröße $L = 6 \text{ m}$
- VERF-4: Bezugsgröße $L = 5 \text{ m}$



Verformungsnachweis

Nachdem die vorhandene Bewehrung platziert, die Nachweisparameter eingestellt und die nachzuweisenden Bereiche definiert wurden, kann nun die Verformungsberechnung gestartet werden.

Berechnungsverfahren

Bevor mit der Verformungsberechnung begonnen wird, erfolgt eine Überprüfung, ob die Bemessung aller Platten und Unterzüge aktuell ist. Falls erforderlich, wird die Bemessung unter Berücksichtigung der vorhandenen Bewehrung erneut durchgeführt.

Anschließend erfolgt eine Verformungsberechnung für die maßgebende quasi-ständige Kombination jedes Verformungsnachweisbereichs.

Die Krümmungsberechnung unter Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen erfolgt nach DAfStb-Heft 525, Beitrag zu Abschnitt 11.3 von DIN 1045-1, wonach über einen belastungsabhängigen Verteilungsbeiwert ζ zwischen Zustand I (ungerissen) und reinem Zustand II (vollständig gerissen) gemittelt wird.


Ergebnisse

Im Wesentlichen werden folgende Ergebnisse ermittelt:

- **im Zustand I**
 Beton im ungerissenen Zustand unter Berücksichtigung der Bewehrung
- **im Zustand II**
 Beton im teilweise gerissenen Zustand unter Berücksichtigung der Bewehrung
- **Anfangsverformung**
 nur Berücksichtigung der ständigen Einwirkungen (ohne Ausbaulasten, ohne veränderliche Einwirkungen), ohne Berücksichtigung von Kriechen und Schwinden, im Zustand I und II
- **Endverformung**
 mit Berücksichtigung von Kriechen und Schwinden, im Zustand I und II
- **Differenzverformung**
 Differenz aus Endverformung und Anfangsverformung, nur im Zustand II
- **Ausnutzung**
 Verhältnis von vorhandener zu zulässiger Verformung im Zustand II, für Endverformung und Differenzverformung, kann nur in Verformungsnachweisbereichen ausgewertet werden
- **elastisches Moment**
 aus elastischer Berechnung, aus quasi-ständiger Kombination
- **Rissmoment**
 zur Erstrissbildung führend
- **Bewehrung**
 für Verformungsberechnung angesetzt, entspricht Gesamtbewehrung aus Biegebemessung

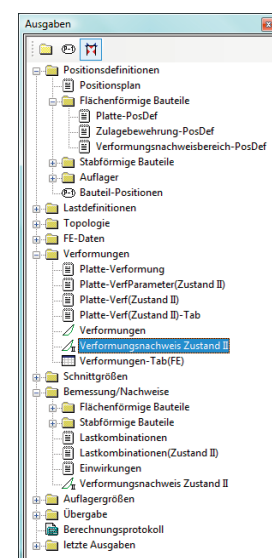
Ausgaben

Es stehen verschiedene Ausgaben zur Verfügung, welche im Ausgabenfenster im Ordner „Verformungen“ (oder auch unter „Bemessung/Nachweise“) zu finden sind:

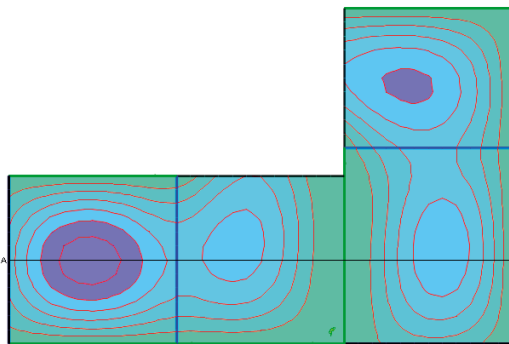
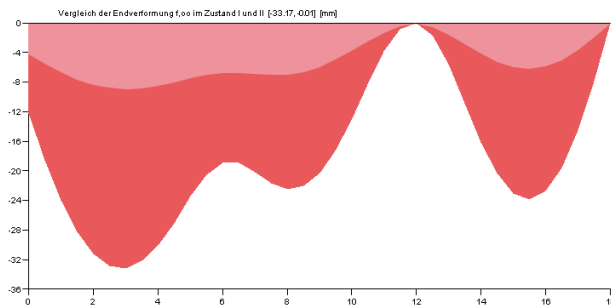
- **Lastkombinationen(Zustand II)**
 Dokumentation der maßgebenden (quasi-ständigen) Lastkombinationen
- **Platte-VerfParameter(Zustand II)**
 Dokumentation der Nachweisparameter und der zulässigen Grenzwerte
- **Platte-Verf(Zustand II)**
 Dokumentation des Verformungsnachweises für alle Verformungsnachweisbereiche, beinhaltet die ersten beiden Ausgaben
- **Platte-Verf(Zustand II)-Tab**
 Dokumentation des Verformungsnachweises bzw. der Verformungsberechnung in Tabellenform für alle FE-Knoten des Modells, beinhaltet die ersten beiden Ausgaben
- **Verformungsnachweis Zustand II** 
 Ergebnisdiskussion in grafisch-interaktiver Ausgabe

Zur Dokumentation der Zulagebewehrung und der Verformungsnachweisbereiche existieren im Ordner „Positionsdefinitionen“ entsprechende PosDef-Ausgaben:

- **Zulagebewehrung-PosDef**
- **Verformungsnachweisbereich-PosDef**



Beispielhaft ist hier die **Endverformung in der vergleichenden Schnittdarstellung der grafisch-interaktiven Ausgabe** zu sehen, in welcher die Verformungen im Zustand I und Zustand II gemeinsam in einem Diagramm sichtbar sind. Es ist deutlich zu erkennen, wie die Verformungen in Feldmitte im gerissenen Zustand II gegenüber dem ungerissenen Zustand I zunehmen.



Hier die Ausgabe **Platte-Verf(Zustand II)** mit Auflistung der Nachweisparameter und der maßgebenden Lastkombinationen und grafischer Darstellung der Ausnutzung von Endverformung und Differenzverformung:

Verformungsnachweis im Zustand II

Parameter für den Verformungsnachweis im Zustand II

- phi = Endwert phi
- phi_0,0 = Endwert phi_0,0
- Langzeitbel. = liegt eine Langzeitbelastung vor?
- zick = als minimalen Verformungswert phi_0,0 berücksichtigen (vgl. jeweils Betonkaltender 1996, Teil 1, S.714f.)

Position	phi	phi_0,0	Langzeitbel.	zick
VE-1	2,500	-0,500	x	x
VE-2	2,500	-0,500	x	x
VE-3	2,500	-0,500	x	x
VE-4	2,500	-0,500	x	x

zul_f_00 = Grenzwert der Endverformung
zul_f_00-f_0 = Grenzwert der Differenzverformung

Position	zul_f_00	zul_f_00-f_0	[mm]
VERF-1	24,0	12,0	
VERF-2	24,0	12,0	
VERF-3	24,0	12,0	
VERF-4	20,0	10,0	

Maßgebende Lastkombinationen für Verformungsnachweis im Zustand II

LF	LF1	LF2	LF3	LF4	LF5
1	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2	1,00	0,00	0,30	0,00	0,30
3	1,00	0,00	0,00	0,30	0,30
4	1,00	0,30	0,30	-	-

Ausnutzung der Endverformung im Zustand II

Ausnutzung_etas(f_00)

Isolinienstufen = 30,00 %

Position	x	y	ETA_00	ETA_00-f_00	f_00	etas(f_00)	LKN
VERF-1	1,00	1,00	1,111	1,160	-11,9	117,24	1
VERF-2	8,00	1,50	1,270	1,114	-23,5	97,89	4
VERF-3	14,50	8,50	1,379	0,842	-25,0	124,24	3
VERF-4	14,50	9,00	1,134	1,379	-24,2	131,22	1

Ausnutzung der Differenzverformung im Zustand II

Ausnutzung_etas(f_00-f_0)

Isolinienstufen = 20,00 %

Position	x	y	ETA_00	ETA_00-f_00	f_00-f_0	etas(f_00-f_0)	LKN
VERF-1	1,00	1,00	1,111	1,160	-11,9	114,19	1
VERF-2	8,00	1,50	1,200	1,072	-12,9	107,67	4
VERF-3	14,50	8,50	1,370	0,842	-14,4	119,82	3
VERF-4	14,50	9,00	1,134	1,379	-14,1	141,37	1